This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

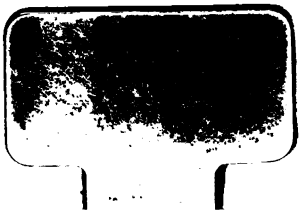
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

182. a.
4.



CARDANUS FORMEL,

deren Verwandlung

zur

Berechnung der Wurzeln von Zahlengleichungen

von der Gestalt: $x^3 - Px - Q = 0$

und eine allgemeine aus jener abgeleitete Form der Wurzeln der letzteren.

Lösung des dreihundertjährigen Problemes

von

DR. E. BÜCHNER,
Professor am Herzoglichen Gymnasium zu Hildburghausen.

Hildburghausen, 1857.

Verlag der Kesselring'schen Hofbuchhandlung.

182. a. 4.

BIBLIOTHECA·BODLEIANA

Vorrede.

Ein wissenschaftliches Räthsel erweckt so lange Interesse, bis es gelöst vorliegt und dieses Interesse wächst mit der Zahl der zu seiner Entzifferung angestellten Versuche, bis eben der Schleier gelüftet wird. Auf dem Gebiet der Mathematik finden sich noch da und dort und, was merkwürdig genug bleibt, oft in den elementarsten, also — so sollte man meinen — in den zugänglichsten Lehren Räthsel, und dann noch obendrein an Stellen in der systematischen Verknüpfung der einzelnen Sätze, wo die vorangehenden, wie die nachfolgenden Behauptungen längst als festgestellt angesehen und ohne Weiteres benützt werden. Man denke nur an die Euklidische Parallelntheorie! Beinahe 2000 Jahre ermüdete man nicht, für den Euklidischen elften Grundsatz als Lehrsatz den Beweis zu suchen, nahm ihn jedoch für die nachfolgenden Sätze einstweilen als wahr hin und ein vollständiger Umbau auf ganz neuen Grundlagen, z. B. eine Umwandlung des dogmatischen Verfahrens in ein spekulatives, gehörte dazu, dieses Räthsel zu beseitigen.

Vorliegende Blätter haben es mit einer sehr alten, vielfach besprochenen, räthselhaften Aufgabe, mit der Umgestaltung der bei Mathematikern von Fach so übel berüchtigten Cardanischen Formel zu thun, deren wunderliche Form und Unfügsamkeit in den Fällen, wo es sich um praktische Verwendung handelte, immer eine Lücke in dem systematischen Zusammenhang der algebraischen Lehren liess, mit einem Räthsel, dessen rein theoretisches Interesse aber noch grösser als das praktische ist. Es handelt sich ja hauptsächlich um Feststellung einer mathematischen Wahrheit. Dürfen wir den geschichtlichen Nachrichten trauen, so verdanken wir die erste Lösung der cubischen Gleichungen dem Professor der Mathematik zu Bologna, Namens Scipio Ferreo, die Erweiterung derselben dem italiänischen Kriegsbaumeister Nicolo Tartaglia von Brescia, (von welchen der erstere von 1496—1525, der zweite bis in die Mitte des 16. Jahrhunderts gelebt haben soll) die Veröffentlichung dem Mailänder Professor Hieronymus Cardanus, welcher vielleicht von 1501—1576 lebte. Der letztere übergab die gefundene Regel in seiner: *Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus* im J. 1545 zum Gebrauch dem Publikum. Die damaligen Mathematiker begrüssten allwärts die

gegebene Lösung mit grosser Freude, so wenigstens lesen wir in der Coss Christoph Rudolffs, herausgegeben von Mich. Stifel, (Königsberg 1553,) fanden jedoch sehr bald, dass die von Cardanus hochgepriesene und verbreitete Regel dem Rechner gerade da ihre Dienste versagte, wo die vorgelegte cubische Gleichung von der Form: $x^3 - Px - Q = 0$ war, lauter mögliche Wurzeln enthält, also gar keine Schwierigkeiten bieten sollte. Cardanus hatte diesen Uebelstand sicher sehr früh selbst entdeckt, darauf weist wenigstens der Titel eines zu Basel 1570 herausgekommenen Werkes, welcher lautet: ***Opus novum de proportionibus numerorum, motuum etc. praeterea artis magnae liber unus, item de Regula Aliza liber*** deutlich hin. Er behandelt namentlich in der dritten Abtheilung ***de Regula Aliza*** den Fall der cubischen Gleichungen, der unter der Form: $x^3 - bx - c = 0$ begriffen ist und musste nothwendig auf den gerügten Missstand stossen, wohin auch das ***Aliza,*** vielleicht von dem griechischen *ἀλύω, ἀλύζω* (nicht auflösen) gebildet, deuten mag. Seit Cardanus raubte die Beseitigung dieses Anstosses, welchen die Cardanische Formel bei der Lösung der cubischen Gleichungen hereinzieht, den gewandtesten Mathematikern viel Zeit, ohne dass im Wesentlichen an der Formel selbst etwas geändert worden wäre. Man findet auch deswegen die oft erwähnte Regel in den mathematischen Lehrbüchern mit dem Namen einer unbrauchbaren, absoleten, abstrusen u. a. belegt und über die Art der Versuche, sie brauchbar zu machen, liesse sich in der That ein artiger Octavband zusammenschreiben, wollte man auch nur den ***Actis Eruditorum,*** Klügel's mathem. Lexicon, ***Montuclas histoire des Mathematiques,*** den Euler'schen, Newton'schen u. a. Schriften des vorigen und vorvorigen Jahrhunderts, das Vorzüglichere entnehmen, gar nicht der neueren Forschungen zu gedenken, welche fast jedes Heft der Grunert'schen, Crell'schen, Schlömilch'schen mathematischen Zeitschrift anbietet. Hier nur Einiges!

Newton suchte das Mangelhafte der Cardanischen Formel schon mehr in der Form dieser Regel, als in dem inneren Zusammenhang, welcher zwischen jeder Wurzel einer cubischen Gleichung und deren Coefficienten statt hat. Er sagt (in s. ***Arithm. univers. de Aequationum reductione per divisores surdos,*** S. 209 in Gravesends Ausgabe), es seien alle drei Wurzeln mit den Coefficienten der Gleichung auf gleiche Weise verknüpft, darum werde man aus der Cardanischen Formel niemals die eine oder andere der Wurzeln vorzugsweise herausrechnen können, da keine durch die Gestalt der letztern Regel bevorzugt werde.

Lagrange hält (in s. ***Séances des Ecoles normales***) eine weitere Zurückführung der Cardanischen Formel auf algebraischem Wege nicht für möglich. — Euler verzweifelt in s. Algebra schon an der

Reduction der Ausdrücke: $\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}$ und $\sqrt[3]{2-2\sqrt{-1}}$, welche zusammenaddirt jede Wurzel der Gleichung $x^3 - 6x - 4 = 0$ darstellen, spricht sich weiter aber und allgemeiner dahin aus, dass man sich auf algebraischem Weg der Wurzeln einer cubischen Gleichung direkt nur dann bemeistern könne, wenn dieselben rational seien, widrigen Falls müsse man sich aber doch an die nicht abzukürzende Cardanische Formel halten. Wir kommen auf obiges Beispiel in Abschn. III. wieder zurück, wo es reducirt vorliegt.

Andere Mathematiker suchten den Grund für die Unabkürzbarkeit der Cardan. Formel, abgesehen von der unmöglichen Form, noch in Folgendem. Jeder Cubikwurzelauszug bietet drei Werthe, darum ergeben sich aus beiden Theilen der Cardan. Formel sechs Werthe, von welcher je zwei eine Wurzel der zuständigen Gleichung ausmachen. Welche von diesen neuen Combinationen die rechte sei, das könne man nicht im Allgemeinen entscheiden. — J. Fr. Fries findet in seiner mathem. Naturphilosophie alle Schwierigkeiten in dem unstatthaften Verlangen, in allgemeinen Zeichen die Operationen der Zahlenrechenkunst nachbilden zu wollen. Wir können zwar, sagt dieser scharfsinnige Denker, verlangen: $\sqrt{a+b}$ allgemein auszuführen, müssen aber für ein negatives und, absolut genommen, grösseres b das a nothwendig auf $\sqrt{-1}$ gelangen und dieses Zeichen als ein syntaktisches, nicht weiter zu beseitigendes Operationszeichen betrachten. Nach ihm befinden wir uns also in dem Fall, wo wir vom Einzelnen auf Allgemeines schliessen wollen. — Kästner greift sogar bei Gelegenheit der Prüfung der Cardan. Lösung die Richtigkeit der Reihe an, welche durch: $\sqrt{1-u}$ nach dem binomischen Satz entwickelt, sich ergibt.

Doch genug der Citate! So viel steht fest, dass die Cardan. Formel den an sie gemachten Ansprüchen nicht im vollen Mass genügt. Mit der Ausbildung der höheren Analysis zog man darum die Lösung der cubischen Gleichungen auf jenes Gebiet und es glückte, sich dort der Wurzeln der genannten Gleichung zu bemeistern, allein nicht jedem sind dergleichen Mittel zugänglich, nicht jedem stehen trigonom. Tafeln zu Gebot, auch wurde dadurch die Lücke in den algebraischen Lehren in keiner Weise ausgefüllt, die einfache algebraische Form der Wurzeln der genannten Gleichung nicht erkennbar, es musste deswegen der Wunsch stets rege bleiben, hinter den Schleier schauen zu dürfen.

Die Cardan. Formel hat aber als Lösung der cubischen Gleichung: $x^3 + Px - Q = 0$ die Gestalt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}},$$

welche für alle Zahlengleichungen mit den obigen Zeichen keine Schwierigkeit erkennen lässt. Sobald jedoch obige Form in: $x^3 - Px - Q = 0$ übergeht, wo die Cardan. Formel:

$$x = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}}$$

gibt, dann befinden wir uns bei dem sogenannten *Casus irreducibilis* und das Unbrauchbare der Formel zeigt sich sogleich, wofern: $\frac{Q^2}{4} < \frac{P^3}{27}$ ausfällt, denn das Quadratwurzelzeichen hat einen negativen Radicanden.

Für die Theorie hatte die Verwendung von Reihen mindestens den Nutzen, dass man sich überzeugen konnte, das Unmögliche, welches sich entgegenstellt, sei lediglich Sache der Form. Auf rein algebraischem Wege wollte der Beweis für die Wahrheit dieses Satzes sich lange nicht zusammenfinden lassen. Verf. dieses gelang es jedoch schon längst, auf algebraische Voraussetzungen fussend, die zuletzt ausgesprochene Behauptung festzustellen, wie ein Nachweis hierzu in den Formeln 5) zu lesen ist, welche bereits in dem Osterprogramm des hiesigen Gymnasiums vom J. 1849 dem Publikum übergeben wurden. An diesen ersten glücklichen Versuch reihte sich nun in diesem Jahr der vorliegende zweite, die oft genannte Formel für den praktischen Gebrauch mehr umzugestalten, an und dieser findet sich in Abschn. III. aufgezeichnet. Jener Ansicht, als sei mit der Beseitigung eines solchen mehr theoretischen Räthsels für die Wissenschaft wenig gewonnen, kann nur der allein noch huldigen, welcher den engen logischen Nexus der mathematischen Lehren nicht kennt. Auch der unscheinbarste, aber festgestellte Satz bildet in dem hypothetischen System der Mathematik einen neuen Anhaltepunkt für nachfolgende noch unbekannte Sätze, eröffnet Perspectiven. Formeln 5) hielt Verf. dieses ehemals ebenfalls für unfruchtbar, sollte sich jedoch von dem Gegentheil dieser Ansicht in diesen Tagen zu seiner Freude überzeugen.

Das Verfahren, welches Abschn. III. bietet, selbst anbelangend, so hat dieses mit dem Ausziehen der Cubikwurzel auf die gewöhnliche Weise keine Aehnlichkeit, ist aber so einfach, dass es bald, ja viel eher mechanisch werden kann, als das letztere; sobald man nur die Cardan. Formel selbst auf die unten beschriebene, zu der Operation sich passende Form gebracht hat.

Der Verfasser schliesst mit der Hoffnung, namentlich der Theorie einen wichtigen Dienst mit der Veröffentlichung dieser Entdeckung zu leisten.

Hildburghausen, den 5. Januar 1857.

Professor Dr. Büchner.

I. Die Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - Px - Q = 0.$$

Das gewöhnliche in den meisten algebraischen Handbüchern heimisch gewordene Verfahren, cubische Gleichung von der Form: $x^3 + Px + Q = 0$ aufzulösen, ruht auf der Vorstellung, dass die Unbekannte als aus zwei Theilen bestehend anzusehen sei, oder kurz, man setzt: $x = a + b$ voraus, erhebt die beiden Theile dieser Gleichung in den Cubus, wodurch: $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$ entsteht und vergleicht darauf die unbestimmten Coefficienten dieser Gleichung mit den gegebenen der ersten, mit P und Q. Es folgt, wenn P sowohl als Q negativ sein soll, unmittelbar: $P = 3ab$ und $Q = a^3 + b^3$, daraus:

$$Q = a^3 + \frac{P^3}{27a^3}; \; a^6 - Qa^3 = -\frac{P^3}{27}, \text{ dann } a = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}}; \; b = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}},$$

endlich $x = a + b = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}}$, die bekannte Cardanische Formel. Wir wollen hier vorzugsweise die Form: $x^3 - Px - Q = o$ betrachten, annehmen, dass diese Gleichung die positive Wurzel: $+p$ und die zwei negativen Wurzeln: $-p'$ und $-p''$ in sich schliessen soll.

So klar und einfach der obige Gang auch erscheint, lässt er doch manche Bedenken zu.

Bedeuten α und β zwei reelle Grössen, so ist für $\alpha > \beta$, dann leicht nachweisbar, dass $(\alpha + \beta)^2 > 4\alpha\beta$ sein muss. Daraus folgt nun, auf das Obige angewendet: $(a^3 + b^3)^2 > 4a^3b^3$ oder $Q^2 > \frac{4P^3}{27}$; $\frac{Q^2}{4} > \frac{P^3}{27}$. Gerade das Gegentheil ergibt sich, wenn wir die Wurzeln der cubischen Gleichung mit deren Coefficienten auf folgende Weise zusammenhalten. Da immer $p = p' + p''$; ferner: $p''p' - pp'' - p'p = -P$ oder: $p''p' - p(p'' + p') = -P$ oder: $p''p' + P = p^2$ (1), auch $pp'p'' = Q$ (2) sein muss, so lässt sich folgende Schlussweise anknüpfen: Aus (1) ergibt sich, wegen: $\frac{(p' + p'')^2}{4} > p''p'$ oder $\frac{p^2}{4} > p''p'$, dann: $\frac{p^2}{4} + P > p^2$, $P > \frac{3p^2}{4}$, $P^3 > \frac{27p^6}{64}$; $\frac{64P^3}{27} > p^6$ (3). Ferner folgt aus (2) weiter: $p''p' = \frac{Q}{p}$; $\frac{p^3}{4} > Q$; $p^6 > 16Q^2$ darum wegen (3): $\frac{P^3}{27} > \frac{Q^2}{4}$, eine bekannte Deduction.

Dieser Widerspruch wird unabweisbar an der Cardanischen Formel wieder sichtbar werden, würde aber nicht eintreten, wenn a und b unmögliche Grössen wären, da für unmögliche Grössen der Satz $(\alpha + \beta)^2 > 4\alpha\beta$ nicht gilt. Es muss darum sowohl der eine als der andere Theil der genannten Formel in unmöglicher Form erscheinen und dem ist auch so, sobald die Gleichung: $x^3 - Px - Q = o$ nur reelle Wurzeln enthält. Wir sind bei dem bekannten, vielfach besprochenen *Casus irreducibilis.*

Nicole wies bereits nach, dass, wenn man die Cardanische Formel in zwei Reihen verwandelt, sich das Unmögliche aufhebt. Wir glauben nicht, dieses Hülfsmittels zu bedürfen, um dasselbe darzuthun und setzen voraus, es sei: $\sqrt[3]{\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} = \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$, die Wurzel davon aber $= z \pm \sqrt{y}$, so ergibt sich: $a + \sqrt{b} = z^3 + 3z^2\sqrt{y} + 3zy + y\sqrt{y}$, darum $z^3 + 3zy = a$; $y = \frac{a - z^3}{3z}$. (4)

Zugleich muss sein: $z + \sqrt{y} + z - \sqrt{y} = p$, also der einen z. B. der positiven Wurzel der cubischen Gleichung gleich werden, woraus mit Hülfe von (4) sich weiter ergibt: $z = \frac{p}{2}$, somit $y = \frac{a - p^3 : 8}{3p : 2} = \frac{8a - p^3}{3.4p}$. Für die beiden negativen Wurzeln der cubischen Gleichung für: $-p'$ und $-p''$ folgt auf ähnliche Weise: $y' = -\frac{8a + p'^3}{3.4p'}$ und $y'' = -\frac{8a + p''^3}{3.4p''}$.

Nun ist wegen: $a = \frac{Q}{2} = \frac{pp'p''}{2}$ die Formel:

$$3y = \frac{a - \frac{p^3}{8}}{\frac{p}{2}} \text{ oder } 3y = \frac{\frac{pp'p''}{2} - \frac{p^3}{8}}{\frac{p}{2}} = p'p'' - \frac{p^2}{4} = p'p'' - \left(\frac{p' + p''}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{4p'p'' - p'^2 - 2p'p'' - p''^2}{4} = -\left(\frac{p' - p''}{2}\right)^2$$ ein vollständiges aber negatives Quadrat. Eben dasselbe lässt sich für die beiden anderen Formeln der negativen Wurzeln darthun, es wird, wie sich auf ganz ähnliche Weise, wie vorhin nachweisen liesse, wollten wir weitläufig werden:

$$-\left(\frac{a + p'^3 : 8}{p : 2}\right) = -\left(\frac{p + p'}{2}\right)^2 \text{ und } -\left(\frac{a + p''^3 : 8}{p'' : 2}\right) = -\left(\frac{p + p''}{2}\right)^2.$$

Das beweist aber noch evidenter, als oben bereits geschehen ist, wie nothwendig: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = z \pm \sqrt{y}$ in unmöglicher Form erscheinen muss. Es wird nämlich:

$$x=\sqrt[3]{(z+\sqrt{y})^3}+\sqrt[3]{(z-\sqrt{y})^3}=\sqrt[3]{\left[\frac{p}{2}+\left(\frac{p''-p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}\right]^3}+\sqrt[3]{\left[\frac{p}{2}-\left(\frac{p''-p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}\right]^3}$$

darum:

$$\left.\begin{aligned} +x &= +\frac{p}{2}+\left(\frac{p''-p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}+\frac{p}{2}-\left(\frac{p''-p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} \\ -x' &= -\frac{p'}{2}+\left(\frac{p+p''}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}-\frac{p'}{2}-\left(\frac{p+p''}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} \\ -x'' &= -\frac{p''}{2}+\left(\frac{p+p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}-\frac{p''}{2}-\left(\frac{p+p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

eine Formel, welche jede der drei Wurzeln durch die drei Wurzeln selbst in allgemeiner Gültigkeit darstellt, eine unmögliche Form für jede bietet, sofern die Cardanische Formel als Ausgangspunkt gewählt wurde, und man alle drei Wurzeln als möglich voraussetzte. Sind p'' und p' unmögliche Wurzeln, dann verschwindet in jedem Theil unserer Formel sogleich alles Imaginäre. Ausserdem zeigen Formeln (5), dass auch ohne diese Voraussetzung sich bei gelungenem Wurzelauszug aus Cardans Formel alles Unmögliche wird von selbst heben, ohne, wie Nicole es nöthig fand, den binomischen Satz zum Beweis des eben Ausgesprochenen hereinziehen zu müssen.

Sind diese Formeln richtig, so werden sie sich allen Bedingungen fügen, welche von den cubischen Gleichungen und deren Wurzeln gelten. Bezeichnet man die beiden Theile der Cardanischen Formel mit A und B, dann ist die zweite und dritte Wurzel in den Formeln:

$$x'=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot A+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot B$$

$$x''=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot A+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot B$$

begriffen. Wenden wir diese Bestimmungen auf unsere Gesetze an, dann kommt:

$$\left[\frac{p+(p''-p')\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right]\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)=-p\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{4}\right)+\left(\frac{p''-p'}{4}\right)\left(1-\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right)=$$

$$\left[-p''-p'-(p''+p')\sqrt{-3}+(p''-p')-(p''-p')\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right]:4=$$

$$\left[-2p'-\left[(p''+p')\sqrt{3}+\frac{(p''-p')}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{-1}\right]:4=$$

$$\left[-2p'-\left[\frac{(p''+p')3+(p''-p')}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{-1}\right]:4=$$

$$-\frac{p'}{2}-\left(\frac{p''-2p'}{4}\right)\sqrt{-\tfrac{1}{3}}=-\frac{p'}{2}-\left(\frac{4p''+2p-2p''}{4}\right)\sqrt{-\tfrac{1}{3}}=$$

$-\frac{p'}{2}-\left(\frac{p''+p}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}$, das ist, wie man sieht, der zweite Theil der zweiten Wurzel, was kommen musste.

Es gibt ferner das Produkt: $[p + (p'' - p')\sqrt{-\frac{1}{3}}](-1+\sqrt{-3}) : 4$ sogleich: $[p\,(\sqrt{-3} - 1) - (p'' - p')\,(1 + \sqrt{-\frac{1}{3}})] : 4 =$

$$[-2p'' + (p' + p'')\sqrt{-3} + (p' - p'')\sqrt{-\tfrac{1}{3}}] : 4 =$$

$$\left[-2p'' + \frac{[3(p' + p'') + (p' - p'')]\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}\right] : 4$$

$$[-2p'' + (4p' + 2p'')\sqrt{-\tfrac{1}{3}}] : 4 =$$

$$[-2p' + (2p' + 2p)\sqrt{-\tfrac{1}{3}}] : 4 = -\frac{p''}{2} + \left(\frac{p' + p}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}$$ d. h. den ersten Theil der dritten Wurzel. Weitläufig, aber nicht schwieriger würde die Rechnung für die anderen Theile der beiden Wurzeln ausfallen. Ausser diesen Eigenthümlichkeiten lassen sich alle anderen den Wurzeln der cubischen Gleichung zukommenden Beschaffenheiten, auch wenn man die Formeln (5) nicht abkürzt, an diesen wiederfinden. Z. B. dass die Summe der Quadrate der drei Wurzeln dem doppelten Coefficienten von x oder $2P$, die Summe der Würfel aber $3Q$ gleich ist u. s. w. — Die Formeln bringen, so lange die Wurzeln der Gleichung rational sind, letztere ebenfalls in dieser Form. — Cardan's Formel enthält also in jedem ihrer Theile die Hälfte jeder Wurzel der zugehörigen Gleichung nebst einem damit durch Addition oder Subtraction verbundenen unmöglichen Theil von der Form: $\sqrt{-\frac{1}{3}}$, welcher die Hälfte der Summe oder Differenz der beiden anderen Wurzeln zu Coefficienten hat. Der sogenannte *Casus irreducibilis* ist blos Folge einer scheinbar unmöglichen Form, drängt sich durch die Allgemeinheit der Behandlung der in Frage stehenden Rechnung auf, wie wir weiter unten noch nachweisen werden.

Bezeichnet man die Lokalzahlen von p, p', p'' mit 0, 1, 2, so erscheint für Formeln (5):

$$+\frac{x}{2} = +\frac{p^0}{2} + \left(\frac{p^1 - p^2}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} + \frac{p^0}{2} - \left(\frac{p^1 - p^2}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}};$$

$$-\frac{x^1}{2} = -\frac{p^1}{2} + \left(\frac{p^0 + p^2}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} - \frac{p^1}{2} - \left(\frac{p^2 + p^0}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}};$$

$$-\frac{x''}{2} = -\frac{p^2}{2} + \left(\frac{p^1 + p^0}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} - \frac{p^2}{2} - \left(\frac{p^0 + p^1}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}};$$

an welchen Formeln der combinatorische Zusammenhang leicht klar wird.

Alle Schwierigkeiten, welche die oftgenannte Formel des Cardanus ihrer weiteren Vereinfachung mittelst der Coefficienten der Gleichung entgegenstellt, muss Verfasser dieses lediglich in der Voraussetzung suchen, dass x ein Binomium von der Form $a + b$ sein soll. Die oben geführte Lösung, der die meisten algebraischen Handbücher, ja, soweit Verfasser dieses bekannt ist, fast alle folgen, zeigt, dass b den reciproken Werth von a enthält, $x = a + \frac{P}{3a}$

im Verlauf der Rechnung wird. Betrachten wir a als variabel, bezeichnen dasselbe mit y, dann erscheint: $x = y + \frac{P}{3y}$. Diese Formel wächst nicht continuirlich, sondern lässt eminente Werthe zu. Es gibt nämlich: $x = y + \frac{P}{3y}$ sogleich $\frac{dx}{dy} = 1 - \frac{Py^{-2}}{3}$, also $y = \pm\sqrt{\frac{P}{3}}$; $x = \pm 2\sqrt{\frac{P}{3}}$; dazu: $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2p}{3y^3} = \pm 2:\sqrt{\frac{P}{3}}$. Die Grenze: $+ 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ wird somit ein Minimum; $- 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ ein Maximum. Es lassen sich darum durch: $x = y + \frac{P}{3y}$ kleinere Werthe als: $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ nicht berechnen, soll überhaupt y möglich ausfallen, wie die Annahme $x = y + \frac{P}{3y} < 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ ebenfalls sogleich darthut, wofern man daraus y sucht. Wenn man dagegen statt der vorigen Hülfsformel: $x = y - \frac{P}{3y}$ anwendet, dann tritt keine unmögliche Form bei der Cardanischen Lösung entgegen. Es gilt indessen hier $\frac{dx}{dy} = 1 + \frac{P}{3y^2}$, woraus weiter folgt: $y = \pm\sqrt{-\frac{P}{3}}$; $x = \pm 2\sqrt{-\frac{P}{3}}$, und wird daneben: $\frac{d^2x}{dy^2} = \pm 2:\sqrt{-\frac{P}{3}}$. Diese Formel wächst somit continuirlich, kann jeden Werth annehmen, es lässt sich indessen dieselbe als Substitutionsformel nur bei Lösung der Gleichung: $x^3 + Px \pm Q = 0$ verwenden.

Dieses alles an einem Beispiel klar zu machen, diene die Gleichung: $x^3 - 10x - 30 = 0$. Die positive Wurzel dieser Gleichung ist: $+ 5$, die Substitutionsformel bringt als kleinsten Werth: $+ 2\sqrt{\frac{P}{3}} = + 5{,}02 > + 5$. Der kleinste Werth, den x in der vorliegenden Substitutionsformel erlangen kann, ist somit immer noch grösser, als die positive Wurzel der Gleichung. Die zwei negativen Wurzeln unserer Gleichung sind: -3 und -2. Die Substitutionsformel: $x = y + \frac{P}{3y}$ bietet jedoch als grössten negativen Werth nur: $-5{,}02$, welcher kleiner als: -3 und -2 ist.

Wählt man dagegen: $x^3 + 6x - 45 = 0$ als zu lösende Gleichung, deren Wurzeln: $x = + 3$; $x' = \frac{-3+\sqrt{-51}}{2}$ und $x'' = \frac{-3-\sqrt{-51}}{2}$ sind, so folgt für y aus $x = y - \frac{P}{3y}$; $y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, wofern man $x = + 3$ wählt, also nicht Unmögliches. Die eben genannte Substitutionsformel leistet im letzteren Fall alles, was man wünschen darf. Ganz im Einklang mit diesen

Ansichten stehen folgende allgemeine Lösungen. Euler lehrte bereits in seiner Algebra, dass man die Formel: $az^2 + bz + c$ durch gewisse Werthe von z in ein vollständiges Quadrat umgestalten könne, und zwar am leichtesten, sofern entweder das a, oder das c eine Quadratzahl sein soll, oder wenn sich obige Formel, als unreine Gleichung aufgelöst, in zwei reelle Factoren zerlegen lässt. Dieses benützen wir, um aus unserer Formel das Quadratwurzelzeichen zu entfernen, setzen kurz: $\sqrt[3]{\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} = \sqrt[3]{y \pm \sqrt{z^2 - \frac{P^3}{27}}}$. Der Radicand des Quadratwurzelzeichens ist: $z^2 - \frac{P^3}{27} = \left(z - \sqrt{\frac{P^3}{27}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{P^3}{27}}\right)$, somit unter die dritte oben angeführte Eulersche Bedingung stellbar. Bedeutet nun r eine beliebige reelle Grösse und setzt man: $\left(z - \sqrt{\frac{P^3}{27}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{P^3}{27}}\right)$ $= r^2\left(z + \sqrt{\frac{P^3}{27}}\right)^2$; so folgt: $z = \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\sqrt{\frac{P^3}{27}}$ und daraus: $\sqrt{z^2 - \frac{P^3}{27}}$ $= \frac{2r}{1-r^2}\sqrt{\frac{P^3}{27}}$. Eine cub. Gleichung von der Form: $x^3 - Px - 2\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\sqrt{\frac{P^3}{27}} = 0$ kann darum durch die Cardanische Formel vollständig aufgelöst werden, ohne den *Casus irreducibilis* befürchten zu müssen, und es ergibt sich in der That:

$$x = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+r}{1-r}} + \sqrt[3]{\frac{1-r}{1+r}}\right) = \left[\left(\sqrt[6]{\frac{1+r}{1-r}} - \sqrt[6]{\frac{1-r}{1+r}}\right)^2 + 2\right]\sqrt{\frac{P}{3}}$$

ohne unmögliche Form. Hält man diese allgemeine Lösung mit unserer Grenzformel: $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ zusammen, so zeigt schon ein flüchtiger Blick, dass unter allen Umständen $x > 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ ausfallen muss. Nimmt man z. B. $r = 2$; $P = 3$, dann leitet dieses auf die Zahlengleichung: $x^3 - 3x - \frac{10}{3} = 0$ und auf: $x = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, welches wirklich grösser als: $\left(2\sqrt{\frac{P}{3}}\right) = 2$ ist.

Noch einmal anders! — Betrachtet man in der Cardanischen Formel: $\sqrt[3]{y \pm \sqrt{z^2 - \frac{P^3}{27}}}$ den Coefficenten von z^2 d. h. 1 als Quadrat, so sind wir bei der ersten Eulerschen oben angeführten Bedingung und der Werth von z, welcher den Radicenden des Quadratwurzelzeichens in ein vollständiges Quadrat verwandelt, ist: $\frac{r^2 + 4P^3 : 27}{2r}$; die Quadratwurzel selbst aber wird: $\pm\left(\frac{r^2 - 4P^3 : 2r}{2r}\right)$.

Cubische Gleichungen von der Form: $x^3 - Px \pm \left(\frac{r^2 + 4P^3 : 27}{2r}\right) = 0$ können in ihrer Lösung nichts Unmögliches enthalten, es ist aber: $x = \frac{P}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{r}} + \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$ $= \left(\sqrt[6]{\frac{P}{3}}\sqrt[6]{\frac{2}{r}} - \sqrt[6]{\frac{r}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{P}{3}}$, eine Wurzel, die ebenfalls mit unserer Grenze: $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ nicht im Widerstreit steht, grösser als diese ist. Noch ist aber bei diesen Lösungen zu bemerken, dass bei allen derartigen Gleichungen die beiden anderen Wurzeln unmöglich ausfallen. Hat man einmal einen Werth für die Variabele einer diophantisch-quadratischen Gleichung gefunden, dann hält es nicht schwer, eine Menge anderer zu bestimmen — die Methoden hierzu sind bekannt genug. Wenn man z. B. p eine willkürlich zu wählende Constante nennt, dann führt die Lösung von der allgemeinen Form:

$$x^3 - Px - \left[\left(z^2 - \frac{4P^3}{27}\right)p : z + \left(z^2 + \frac{4P^3}{27}\right)(1 + p^2) : 2z\right] : (1 - p^2)$$

ebenfalls auf gar keine Schwierigkeiten, gibt:

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{z\,(2p + 1) + (z^2 - 4P^3 : 27)\,p^2 : z}{2\,(1 - p^2)}\right]} + \frac{P}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{z}\left(\frac{1 - 2p}{1 - p^2}\right)}.$$

Will man aber umgekehrt aus diesen allgemeinen Lösungen im einzelnen, vorliegenden Fall für eine cubische Gleichung von der Form $x^3 - Px - Q = 0$, deren Wurzeln alle möglich sein sollen, die willkührlichen Constanten bestimmen, so werden diese, wie es zu erwarten steht, sogleich und durchweg unmöglich.

Vergleicht man z. B. $x^3 - 7x - 6 = 0$, wovon die Wurzeln $x = +3;\ -2;\ -1$ sind, mit der Form: $x^3 - Px - \left(r^2 - \frac{4P^3}{27}\right) : 2r = 0$, so wird:

$$P = 7;\ \left(r^2 + \frac{4P^3}{27}\right) : 2r = \left(r^2 + \frac{4.343}{27}\right) : 2r = 6;\ r^2 - 12r = -\frac{4.343}{27}$$

daher $r = 6 \pm \sqrt{36 - \frac{4.343}{27}} = 6 \pm \sqrt{36 - 50{,}8}$ unmöglich, dazu:

$$x = \frac{P}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{r}} + \sqrt[3]{\frac{r}{2}} = \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}}.$$

So lange man die Voraussetzung $x = a + b$ festhält, um damit die positive Wurzel der Gleichung: $x^3 - Px - Q = 0$ zu bestimmen, wird man stets mit diesen durch die Natur dieser Formel hereingezogenen Schwierigkeiten zu kämpfen haben. Ferner findet man leicht, wie alle Verwandlungen dieses Binomiums, so lange es eine Summe bleiben muss, nicht fruchten, das Unmög-

liche abzuweisen, wie das Zeichen $\sqrt{-1}$ als syntaktisches Zeichen, gewissermassen den Widerspruch der in der Voraussetzung liegt, andeutend und vermittelnd sich aufdrängt. Verfasser dieses gebrauchte für $x = a + b$ in dieser Beziehung Formeln wie: $y^{2p+1} + \frac{P}{3y^{2p+1}}$; $y\sqrt{-1} + \frac{P}{3y\sqrt{-1}}$; $y + k + \frac{s}{y-k}$; $\sqrt{y} + \frac{P}{3\sqrt{y}}$; $\frac{y}{m^r} + m^r y$, wo p, r, m, k, s noch näher zu bestimmende Constante bedeuten, jedoch ohne die alte Cardanische Formel beseitigen zu können. Einige Beiträge hierzu:

Pfaff in seiner *Analysis finitor.* gebraucht (p. 188), um aus: $x^3 - ax - b = 0$ eine quadratische Gleichung abzuleiten, statt der in den vorigen Nummern verwendeten Substitutionsformel gleich anfänglich die complicirtere: $x = y + \frac{c}{y}$, wobei c eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Der Einsatz dieser letzteren Function in die cubische Gleichung leitet auf:

$$y^6 + (3c + a)\, y^4 + by^3 + (3c + a)\, cy^2 + c^3 = 0.$$

Soll daraus eine quadratische Gleichung hervorgehen, so muss: $3c + a$ im zweiten und vierten Glied verschwinden, wo dann: $y^6 + by^3 - \frac{a^3}{27} = 0$ hervortritt, und endlich sich unsere oftgenannte Cardanische Formel wieder ergibt. Die Beurtheilung dieses Verfahrens muss sich vorzugsweise mit der eben genannten Substitutionsformel befassen. Es wird aber: $c = -\frac{a}{3}$; daher $x = y - \frac{a}{3y}$; $\frac{dx}{dy} = 1 + \frac{a}{3y^2} = 0$; $y = \sqrt{\frac{-a}{3}}$; $x = \sqrt{\frac{-a}{3}}$, dazu $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-2}{\sqrt{-a:3}}$. Für $c = -\frac{a}{3}$ gibt es also keinen eminenten Werth des x aus $x = y + \frac{c}{y}$, darum auch keine Schranken, innerhalb welcher wir den Werth von x nur zu suchen hätten. Darum genügt die Substitutionsformel für die Lösung von: $x^3 + ax \pm b = 0$ vollkommen, allein nicht so für: $x^3 - ax \pm b = 0$. Wäre z. B. $x^3 - 5x - 2 = 0$ vorgelegt, wo: $x = 1 + \sqrt{2}$; $x' = 1 - \sqrt{2}$; $x'' = -2$ ist, so wird die eben verwendete Substitutionsformel: $x = y + \frac{a}{3y} = y + \frac{5}{3y} = 1 + \sqrt{2}$, also $y^2 - (1 + \sqrt{2})\, y = -\frac{5}{3}$, daher:

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} - \frac{5}{3}}$$

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{3(3+2\sqrt{2}) - 20}{4.3}}$$

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{2} - 11}{4.3}}$$

ausfallen, also bietet: y Unmögliches. Das oben allgemein festgestellte Minimum ist hier:

$2\sqrt{\frac{a}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3}\cdot 3{,}87.. = 2{,}58..$ und daneben findet sich $x = 1+\sqrt{2}$ $= 2{,}414... < 2{,}58$ ein Widerspruch. Aehnliches tritt für das negative Maximum ein.

Grunert in dem Archiv für Math. und Phys. Thl. XI. H. 4 schlägt, um: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in eine quadratische Gleichung zu werwandeln, vor, man solle:

$$x = \frac{u^2 - \frac{au}{3} - \frac{1}{3}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)}{u}$$

einführen. Hierdurch wird allerdings das Gewünschte erreicht, indem zunächst:

$$u^6 + \left[\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}\right) + c\right] u^3 - \frac{1}{27}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3 = 0,$$

daraus durch die Substitution: $v = u^3$,

$$v^2 + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)v - \frac{1}{27}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3 = 0$$

hervorgeht.

So sinnreich jener Einsatz auch gewählt wurde, er leidet an demselben Fehler, wie der Vorschlag Pfaff's, indem auch hier nur eine Schrankenlösung erzielt wird. Die gewählte Function für x lässt nämlich ebenfalls eminente Werthe zu, über welche hinaus kein x, oder besser, nur unmögliche Variabeln der genannten Art sich ergeben. Es ist nämlich:

$$x = u - \frac{a}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{b - a^2 : 3}{u}\right)$$

$$\frac{dx}{du} = 1 + \frac{1}{3}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)u^{-2} = 0, \text{ daraus:}$$

$$u = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)}, \text{ mithin:}$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3} + \left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right) : \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)},$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)};$$

daher für x der eine der eminenten Werthe:

$$x = +\ 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3}, \text{ der andere}$$

$$x = -\ 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3}. \text{ Dazu weist:}$$

$$\frac{d^2x}{du} = -\frac{2}{3}\left(b - \frac{a^2}{3}\right)u^{-3} = \frac{-2\left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)}{\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)^3}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)}}$$

mit dem ersten Zeichen auf ein Minimum, mit dem zweiten auf ein Maximum. Innerhalb dieser Schranken leitet die endlich hervorgehende Cardanische Formel auf mögliche Functionen.

Die Gleichung: $x^3 + 9x^2 + 16x - \frac{79}{8} = 0$, hat zu Wurzeln: $x = \frac{1}{2}$; und $x = \frac{-19 \pm \sqrt{45}}{4}$. Untere Grenze aber wird in diesem Fall:

$$x = +2\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3} = 2\sqrt{\left(\frac{9^2}{9} - \frac{15}{3}\right)} - 3 = 2\sqrt{(9-5)} - 3 = +1.$$

Wählt man nun:

$$x = \frac{u^2 - \frac{au}{3} + \left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)}{u} = \frac{1}{2} = \frac{u^2 - 3u + 4}{u}, \text{ so erscheint,}$$

$$u^2 - 3u + 4 = \frac{u}{2}$$

$$u^2 - \frac{7u}{2} = -4$$

$$u = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49 - 64}{4^2}}$$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{-15}}{4}$$ wie zu erwarten stand, für u Unmögliches, denn wir haben mit $x = \frac{1}{2}$ auch die Schranke des Minimums überschritten. Wenn man dagegen: $x = 1$ annimmt, so geht jene Substitutionsformel in:

$$u^2 - 3u + 4 = u$$
$$u^2 - 4u + 4 = 0$$
$$u = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2, \text{ also in Mögliches über.}$$

Die Schranke für das negative Maximum wird in diesem Fall:

$-2\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3} = -7$. Setzt man:

$\frac{u^2 - 3u + 4}{u} = -3$, also:

$u^2 - 3u + 4 = -3u$,

$u^2 + 4 = 0$, dann kommt, wie's nothwendig sein musste

$u = \sqrt{-4}$, Unmögliches. Dagegen bringt:

$$\frac{u^2 - 3u + 4}{u} = -7,$$
$$u^2 - 3u + 4 = -7u,$$
$$u^2 + 4u + 4 = 0,$$
$$u = -2 \text{ noch Mögliches.}$$

Es hat: $x^3 - 5x - 2 = 0$ die Wurzeln: $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$; -2. Jene Gleichung mit: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ verglichen, leitet auf: $a = 0$; $b = -5$; $c = -2$, wodurch alsdann die obige Substitutionsformel in: $\frac{u^2 + 5:3}{u} = x$ übergeht. Somit erscheint als Minimum: $2\sqrt{\frac{5}{3}} = 2{,}58\ldots$ Aber $1 + \sqrt{2} = 2{,}414$ ist $< 2{,}58\ldots$, wir müssen darum hier wieder auf Unmöglichkeiten treffen. Derselbe Fall tritt ein für das Maximum, welches: $-2\sqrt{\frac{5}{3}} = -2{,}58 < -3$ wird, wogegen: $1 - \sqrt{2} = 1 - 1{,}414\ldots = -0{,}414 > -2{,}58$ sich ergibt, was, wie bei der Pfaff'schen Substitution, ebenfalls auf Unmögliches führen muss.

Allgemein. Setzt man in: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a = 0$; daneben anstatt b Negatives und zwar, indem man die Gleichung: $x^3 - ax - b = 0$ mit jener der vorigen Nummer vergleicht, jetzt: $-a$, statt c jetzt: $-b$ ein, so sind wir ganz und gar bei der Pfaff'schen Deduction, und es gilt demnach von dieser Methode dasselbe, wie von der vorigen. Aus den eminenten Werthen: $x = \pm 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}\right)} - \frac{a}{3}$ wird, unter diesen Voraussetzungen: $x = \pm 2\sqrt{\frac{a}{3}}$ u. s. w., woraus für die weitere Beurtheilung Alles andere von selbst klar ist.

Oben sahen wir, dass in der ersten Lösung anstatt: $x = a + b$ auch: $x = y + \frac{c}{y}$ gewählt werden darf, um von der cub. Gleichung: $x^3 - Px - Q = 0$ auf eine unreine quadratische zu gelangen. Es fällt somit die Betrachtung jener Lösungsweise, für die Beurtheilung wie weit sie Zulässiges oder Nichtzulässiges darbietet, mit der eben angestellten vollkommen zusammen.

Den trigonometrischen Lösungen, wovon es bekanntlich zwei wesentlich verschiedene Arten gibt, geht, so lange nicht Logarithmentafeln zur Seite liegen, genau genommen der Werth vollständiger Lösungen ab, sie schieben nämlich die Entwickelung cubischer Gleichungen auf das Gebiet der Reihen hinüber, ohne einen Einblick in das Innere unserer Formel zu gestatten. Die eine Methode verfährt, wenn wir unseren Fall, also den sogenannten *Casus irreducibilis* in's Auge fassen, folgender Weise: Für die Gleichung: $x^3 - Px + Q = 0$ und $\frac{P^3}{27} > \frac{Q^2}{4}$

nimmt man: $cos\varphi = \sqrt{\frac{27Q^2}{4P^3}}$, dann wird dieser Cosinus kleiner als der Halbmesser, dadurch $\frac{Q}{2} = cos\varphi \sqrt{\frac{P^3}{27}}$. Wird der eine Theil von Cardans Formel, nämlich:

$$\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}}$$ auf die Form:

$$\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{P^3}{27}}\sqrt{\left(\frac{27Q^2}{4P^3} - 1\right)}} = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{P^3}{27}}\sqrt{(cos\varphi^2 - 1)}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{P^3}{27}}\, sin\varphi\, \sqrt{-1}} = \sqrt[3]{(cos\varphi + sin\varphi\sqrt{-1})\sqrt{\frac{P^3}{27}}}$$ gebracht, so lässt sieh leicht einsehen, dass der andere: $\sqrt[3]{(cos\varphi - sin\varphi\sqrt{-1})\sqrt{\frac{P^3}{27}}}$ und $x = -2cos\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{\frac{P}{3}}$, für ein negatives P aber: $x = +2cos\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{\frac{P}{3}}$ werden muss. Nun ist $cos\varphi$ bekannt, darum mittelst Tabellen auch: $cos\tfrac{1}{3}\varphi$, und $x = -2cos\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{\frac{P}{3}}$. Was leistet demnach dieses Verfahren im Vergleich zu dem rein algebraischen? Es entfernt auf ähnliche Weise wie Nicole's Entwickelung mittelst des binomischen Satzes, aber freilich in geschlossenen Ausdrücken, in trigonometrischen Functionen, das sich mit Gewalt aufdrängende Unmögliche.

Die beiden anderen Wurzeln erscheinen dann aus Eigenthümlichkeiten des Cosinus unmittelbar in möglicher Form, und sind bekanntlich:

$$2cos\,(60^0 - \tfrac{1}{3}\varphi)\sqrt{\frac{P}{3}} \text{ und: } 2cos\,(60^0 + \tfrac{1}{3}\varphi)\sqrt{\frac{P}{3}}.$$

Das andere trigonometrische Verfahren lässt sich aber gar nicht auf Cardan's Formel ein, braucht keine Substitutionsformel, geht lediglich von bekannten trigonometrischen Formeln, z. B. von: $cos\varphi^3 - \frac{3}{4}\,cos\varphi - \frac{1}{4}\,cos3\varphi = 0$ aus, vergleicht, indem: $x = rcos\varphi$ in die zu lösende cubische Gleichung eingesetzt wird, damit: $r^3cos\varphi^3 - Prcos\varphi - Q = 0$, berechnet: $r = \pm 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ und gibt endlich: $x = \pm 2\sqrt{\frac{P}{3}}cos\varphi$; also auch noch keine Lösung, mittelst deren wir die algebraische Form der Wurzeln kennen lernen könnten. Sie überlässt den Abschluss der Rechnung den logarithmischen Tabellen, wie vorhin.

Suchen wir für unsere oben oft besprochene Substitutionsformel, nämlich für: $y + \frac{P}{3y}$ den Werth für y, so zeigt eine leichte Rechnung, wofern wir die erste Methode im Auge behalten, indem wir: $y + \frac{P}{3y} = k$ setzen, weil dann: $y^2 - ky = -\frac{P}{3}$; $y = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{3} - \frac{P}{3}}$ ausfällt, nach Einsatz des wirklichen Werthes für k, nämlich des: $+ 2cos\tfrac{1}{3}\varphi \sqrt{\frac{P}{3}}$, dass $y = \left(cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm sin\tfrac{1}{3}\varphi\right)\sqrt{-1}\sqrt{\frac{P}{3}}$ also unmöglich wird. Nur der Hinzutritt von: $\frac{P}{3y}$ bringt dann das mögliche: $+ 2cos\tfrac{1}{3}\varphi \sqrt{\frac{P}{3}}$. Noch müssen wir bemerken, wie für $P = 0$ beide Verfahren uns den Dienst versagen. Es geht für diese Voraussetzung: $cos\varphi = \sqrt{\frac{27Q^2}{4P^3}}$ in's Unendliche über, was $cos\varphi$ unmöglich, $x = 2cos\tfrac{1}{3}\varphi \sqrt{\frac{P}{3}}$ aber dann unbrauchbar sein lässt, während letzteres aus: $x^3 - Q = 0$ doch den Werth: $\sqrt[3]{Q}$ erhält. Die Substitution: $r = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ bringt unter derselben Voraussetzug für x den Werth Null, also wandeln die obigen trigonometrischen Entwickelungen, bloss vollständige cubische Gleichungen von der Form: $x^3 - Px - Q = 0$ und solche von der Form: $x^3 - Px = 0$ so um, dass wir trigonometrische Tafeln anwenden können.

Soll darum der *Casus irreducibilis* durch eine binomische Substitutionsformel vermieden werden können, dann ist eine solche zu wählen, die keinen eminenten Werth zulässt, also continuirlich wächst. Dass es aber zu diesem Zweck passende Formeln gebe, möchte Verfasser bezweifeln, wenn er die Zahl der Versuche, die dessfalls bereits eingeleitet wurden, übersieht. Wollte man die verschiedenen über diesen Gegenstand erschienenen Abhandlungen zusammenstellen, es liesse sich, wie schon oben erwähnt, ein artiger Band damit anfüllen und erinnert dieses Thema darum lebhaft an das geometrische der Paralleltheorie und die vermeintliche Unlösbarkeit der Quadratur des Cirkels.

II. Umformung des Radicanden in der Cardanischen Formel, zum Zweck des Wurzelausziehens. Die Wurzeln der vorliegenden cubischen Zahlengleichung sind gegeben.

Wenn auch die Cardanische Formel, wofern dieselbe in allgemeinen Zeichen vorliegt, wegen der oben angedeuteten störenden Voraussetzungen, auf algebraischem Weg keine weitere Vereinfachung zuzulassen scheint, hindert dieses doch nicht, eine solche zu erzielen, sofern dieselbe lediglich Zahlen in sich schliessen soll. Oben unter (5) wurde streng erwiesen, dass ganz allgemein:

$$\left.\begin{matrix} +x \\ -x' \\ -x'' \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{2} - \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} =$$

$$\left\{\begin{matrix} +\frac{p}{2} + \left(\frac{p'' - p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} + \frac{p}{2} - \left(\frac{p'' - p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} \\ -\frac{p'}{2} + \left(\frac{p + p''}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} - \frac{p'}{2} - \left(\frac{p + p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} \\ -\frac{p''}{2} + \left(\frac{p + p'}{3}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} - \frac{p''}{2} - \left(\frac{p + p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} \end{matrix}\right.$$

sein muss. Daraus folgt:

1) der Radicand unter dem Quadratwurzelzeichen in Cardans Eormel ist, abgesehen von dem Factor: $\left(-\frac{1}{3}\right)$, stets ein vollständiges Quadrat, dessen Wurzel von der Form: $\left(\frac{p'' - p'}{2}\right)$ oder $\left(\frac{p + p''}{2}\right)$ oder $\left(\frac{p + p'}{2}\right)$. Dieser Radicand hat aber wegen: $\sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}} = \sqrt{\left(\frac{4P^3 - 27Q^2}{4.9}\right)}\sqrt{-\frac{1}{3}}$ die Gestalt: $\frac{4P^3 - 27Q^2}{4.9}$.

2) Enthält die Formel, wie wir voraussetzen, nur Zahlen, dann wird dieselbe in der Regel durch mancherlei Reductionen der Zahlen sehr verändert vorliegen, welche Umgestaltungen die Cardanische Formel in ihrer Allgemeinheit nie andeuten kann. Soll darum der Wurzelauszug glücken, so ist es zunächst nöthig, diese Aenderungen durch Formeln (5), so weit wie möglich, zu errathen, um die ursprüngliche Gestalt des Radicanden unter dem Cubikwurzelzeichen wieder herzustellen. Nach eben genannten Formeln muss zunächst:

3) der Radicand ursprünglich immer 8 zum Nenner gehabt haben, da der Cubikwurzelauszug als Nenner in Formel (5) die Zahl 2 enthält;

4) Der Zähler muss stets den Factor: $\left(-\frac{1}{3}\right)$ enthalten, da dieser in Formel (5) sich wieder vorfindet. Es muss somit im vorliegenden Fall der Cardanischen Formel die ursprünglichere Gestalt:

$$\sqrt[3]{\frac{4Q+4\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{4P^3-27Q^2}{9}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}}{8}}+\sqrt[3]{\frac{4Q-4\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{4P^3-27Q^2}{9}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}}{8}}$$

gegeben werden.

Bezeichnet man aber den einen und anderen Theil der ersten Formel bei (5) zugleich mit: $\left(m \pm y\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) : 2$, so ist cubirt: $\left(m \pm y\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 : 8$

$= \left(m^3 \pm 3m^2y\sqrt{-\frac{1}{3}} - my^2 \mp y^3\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) : 8$, woraus sich ergiebt:

α) Handelt es sich darum, die positive Wurzel der Gleichung: $x^3 - Px - Q = 0$ aufzufinden, dann ist wegen $4Q = m^3 - my^2$, der erste Theil der zu suchenden Cubikwurzel oder m stets grösser als $4Q$ zu wählen, kleiner, wofern für die beiden negativen Wurzeln die Cubikwurzel gesucht werden soll, wegen: $4Q = -m^3 + my^2$.

β) Aus den letzten Formeln ergibt sich noch, wegen: $4Q = m(m^2 - y^2)$ und: $4Q = m(y^2 - m^2)$, dass m ein Factor von $4Q$ sein muss.

γ) Es ist ferner: $\frac{4Q - m^3}{-m} = y^2$ und $\frac{4Q + m^3}{m} = y^2$ im ersten Fall also die Differenz zwischen dem ersten Theil der gesuchten Cubikwurzel und $4Q$ getheilt durch jenen ersten Theil, im zweiten Fall die Summe aus dem ersten Theil der Cubikwurzel und $4Q$ getheilt durch jenen ersten Theil ein vollständiges Quadrat.

δ) Aus den beiden vorigen Gesetzen ergibt sich weiter: $4Q - m^3$ oder $4Q + m^3$ und $4Q$ müssen einen gemeinsamen Factor und zwar m als solchen haben; eine Bestimmung, welche bei grossen Zahlen sehr gute Dienste leistet.

ε) Hat die Gleichung zwei negative irrationale Wurzeln, so können diese nur unter der Form: $-A + B\sqrt{k}$ und: $-A - B\sqrt{k}$ vorhanden sein, wobei B auch den Werth 1 haben darf. Die dritte und zwar positive Wurzel ist dann rational, wird durch die Formel:

$\left(\frac{p}{2} + \left(\frac{p'' - p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{p}{2} - \left(\frac{p'' - p'}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$ repräsentirt; wovon der eine und andere Theil cubirt ist:

$$\left(m^3 \pm 3m^2B\sqrt{k}\sqrt{-\frac{1}{3}} - mB^2k \mp B^3k\sqrt{k}.\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) : 8,$$

wenn wir die vorigen beiden Klammerausdrücke in einen zusammenziehen, annehmen. Daraus folgt weiter: $\frac{\pm m^3 + 4Q}{\mp m} = B^2k$, d. h. in diesem Fall kommt als Quotient aus der unter (γ) besprochenen Differenz oder Summe ein Produkt, bestehend aus einem Quadrat (B^2) und einer anderen Zahl (k). Es hält nicht schwer, diesen Satz auf Wurzeln auszudehnen, die durch rationale Brüche dargestellt

werden, dann muss: $\frac{4Q \pm m^3}{\pm m} = \left(\frac{y}{z}\right)^2$ werden, wo $\frac{y}{z}$ eben einen rationalen Bruch bedeutet. Wir nehmen in den nächsten Beispielen an, dass die Wurzeln der Gleichungen, deren Lösung die Cardanische Formel vermitteln soll, bekannt seien, werden aber im folgenden Abschnitt nachweisen, wie auch ohne diese Voraussetzung die eben genannte Formel leicht zum praktischen Gebrauch vereinfacht werden kann.

Beispiel I.

Die Gleichung: $x^3 - 19x - 30 = 0$ hat: $+5$; -2; -3 zu Wurzeln, die Cardanische Formel gibt für dieselben den Werth:

$\sqrt[3]{15 \pm \sqrt{-\frac{784}{27}}} = \sqrt[3]{15 \pm \frac{28}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}$, wenn wir beide Theile derselben in einen einzigen zusammenfassen. Die Cubikwurzel muss 2 zum Nenner haben, daher der Radicand nach No. 3 umgestaltet werden, das führt auf:

$$\sqrt[3]{\frac{120 \pm 224\sqrt{-\frac{1}{3}} : 3}{8}}.$$

Wählt man $m = +5$, so erscheint sofort:

$$\frac{4Q - m^3}{-m} = \frac{120 - 125}{-5} = +1 = y^2;\ y = \pm 1, \text{ darum:}$$

$$x = \frac{5 + 1.\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} + \frac{5 - 1\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = 5.$$

Wählt man $m = -2$, so ergibt sich:

$$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{120 + 8}{2} = 64 = y^2;\ y = \pm 8, \text{ daher:}$$

$$x' = \frac{-2 + 8\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} + \frac{-2 - 8\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = -2.$$

Endlich $m = -3$, bringt:

$$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{120 + 3^3}{3} = 49 = y^2;\ y = \pm 7.$$

$$x'' = \frac{-3 + 7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} + \frac{-3 - 7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = -3.$$

Beispiel II.

Euler versucht es in seiner Algebra vergeblich, die Wurzel der Gleichung: $x^3 - 6x - 4 = 0$ aus der oft genannten Cardanischen Formel abzuleiten. Die Wurzeln sind (nicht schwer zu errathen): $x' = -2$; $x = 1 + \sqrt{3}$; $x'' = -1 - \sqrt{3}$. Cardan's Formel bringt den Werth:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - \frac{3^3 . 2^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 \pm 2\sqrt{-1}}.$$

Dieses nach No. 3) umgestaltet, gibt:

$$x = \frac{\sqrt[3]{16 \pm 16\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}}{8}.$$

Wir beginnen mit der negativen rationalen Wurzel; dann erscheint:

$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{16 + 8}{2} = 12 = y^2$; $y = 2\sqrt{3}$, also wird:

$$x' = \frac{-2 + 2\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} + \frac{-2 - 2\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = -2.$$

Daneben bringt: $\frac{4Q - m^3}{m}$, für $m = 1 + \sqrt{3}$

$$\frac{16 - (1 + \sqrt{3})^3}{1 + \sqrt{3}} = \frac{16 - (1 + 3\sqrt{3} + 3.3 + 3\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} = \frac{6 - 6\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{6(1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} = -y^2, \text{ daher: } \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{6(1 - \sqrt{3})}{+2} = 3(1 - \sqrt{3})^2$$

$= y^2$, und:

$$x = \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Endlich erscheint noch für $m = (1 - \sqrt{3})$:

$$\frac{16 - (1 - \sqrt{3})^3}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4Q - m^3}{m} = \frac{6(1 + \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{3} + 1)}{-\sqrt{3} + 1} = \frac{6(\sqrt{3} + 1)^2}{-2}$$

$$= -3(1 + \sqrt{3})^2 = -y^2; \; y = \pm(1 + \sqrt{3})\sqrt{3}, \text{ somit:}$$

$$x'' = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

Beispiel III.

$x^3 - 18x - 8 = 0$; Cardanus gibt:

$$x = \sqrt[3]{4 \pm \sqrt{16 - \frac{18^3}{27}}} = \sqrt[3]{4 \pm \sqrt{16 - 216}} = \sqrt[3]{4 \pm \sqrt{-200}} = \frac{\sqrt[3]{32 \pm 80\sqrt{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}}{8}.$$

Wurzeln sind: $x = 2 + \sqrt{6}$; $x' = 2 - \sqrt{6}$; $x'' = -2$.

Wir wählen: $m = -4$, dann $m = 2 + \sqrt{6}$, dann $m = 2 - \sqrt{6}$, so folgt:

$$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{32 + 64}{4} = \frac{96}{4} = 24 = y^2, \; y = \pm 2\sqrt{6},$$

$\frac{4Q-m^3}{m} = \frac{32-(2+\sqrt{6})^3}{2+\sqrt{6}} = \frac{32-(44+18\sqrt{6})}{2+\sqrt{6}} = \frac{-(12+18\sqrt{6})}{2+\sqrt{6}} = \frac{-(12+18\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}{2}$

daher $(6+9\sqrt{6})(2-\sqrt{6}) = (6+\sqrt{6})^2 = y^2$; $y = \pm(6+\sqrt{6})$;

$\frac{4Q-m^3}{m} = \frac{32-(2-\sqrt{6})^3}{2-\sqrt{6}} = (6-\sqrt{6})^2 = y^2$; $y = \pm(6-\sqrt{6})$ also:

$x'' = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = -2$; $x = \frac{(2+\sqrt{6}) \pm (6+\sqrt{6})\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}$

$= 2+\sqrt{6}$ und $x' = \frac{(2-\sqrt{6}) \pm (6-\sqrt{6})\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = 2-\sqrt{6}$,

wenn wir die beiden Ausdrücke der Cardanischen Formel hier wie oben in einen zusammenfassen.

III. Die Wurzeln der cubischen Gleichung sind nicht gegeben, sondern gesucht. Umgestaltung des vorigen Verfahrens zum praktischen Gebrauch.

Früher vermochte man, auch wenn die Wurzeln der cubischen Gleichung gegeben waren, es doch nicht, aus der Cardanischen Regel so einfache Formeln abzuleiten, wie der vorige Abschnitt dergleichen zeigt. Wenn nun auch diese Verwandlungen wohl schon an sich einen schätzenswerthen Beitrag für die Theorie bieten, so lässt sich mit Hülfe von Formeln 5) selbst ohne unmittelbare Kenntniss der Wurzeln der Gleichung bei Zahlenbeispielen der oft genannten Regel eine so einfache Gestalt abgewinnen und dieses sich auf folgende Weise erreichen. Es kommt nämlich vorzugsweise darauf an, das m, den ersten Theil der Cubikwurzel, aus der Cardanischen Formel rasch zu errathen, das andere ergibt sich dann ohne viele Mühen. Um dieses m zu errathen, bediente sich Verfasser dieses Grenzmethoden und zwar berechnete er sich dergleichen, welche die Wurzeln der Gleichung sehr genau einschliessen.

Stellt nämlich x eine beliebige Variabele, Q dagegen eine beliebige Constante vor, dann umfasst die Form: $u^3 - xu - Q = 0$ alle cubischen Gleichungen, deren zweites Glied fehlt und welche drei reelle Wurzeln enthalten können. Bezeichnet man: $u^3 - xu - Q$ mit k, fragt nach dem eminenten Werth von u, so folgt als partieller Differentialquotient nach x, $\left(\frac{dk}{dx}\right) = -u$; daneben: $\left(\frac{dk}{du}\right) = 3u^2 - x$; somit $\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{u}{x-3u^2}$. Dieser Differentialquotient, gleich Null gesetzt, bringt einmal als eminenten Werth von u Null, daneben $3u^2 - x = 0$, daraus: $3u^2 = x$ und dieses in die ursprüngliche

Gleichung substituirt, gibt $u = -\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$; $x = 3\sqrt[3]{\frac{Q^2}{4}}$, daneben aber noch wegen

$$(u^3 - 3\sqrt[3]{\tfrac{Q^2}{4}}.\, u - Q) : u + \sqrt[3]{\tfrac{Q}{2}} = u^2 - u\sqrt[3]{\tfrac{Q}{2}} - 2\sqrt[3]{\tfrac{Q^2}{4}} = 0;$$

$$u = \sqrt[3]{4Q} \text{ und: } -\sqrt[3]{\tfrac{Q}{2}}.$$

Die Bedeutung dieser Eminenzien ergibt sich leicht, wofern man in: $\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{u}{x - 3u^2}$ statt x einmal: $3\sqrt[3]{16Q^2} + k$, ein anderes Mal: $3\sqrt[3]{16Q^2} - k$ einsetzt. Es kommt für das Erste: $\left(\frac{du}{dx}\right) = +\frac{\sqrt[3]{4Q}}{k}$, daneben: $\left(\frac{du}{dx}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4Q}}{k}$ als Zeichen, dass $u = \sqrt[3]{4Q}$ ein Minimum sein muss. In $\left(\frac{du}{dx}\right)$ für $x = 3\sqrt[3]{\frac{Q^2}{4}}$ ein Mal: $3\sqrt[3]{\frac{Q^2}{4}} + k$, dann $3\sqrt[3]{\frac{Q^2}{4}} - k$ eingeführt, leitet auf: $\left(\frac{du}{dx}\right) = -\sqrt[3]{\frac{Q}{2}} : k$ und $\left(\frac{du}{dx}\right) = +\sqrt[3]{\frac{Q}{2}} : k$ als Zeichen eines negativen Maximums.

Betrachtet man P als Constante, fragt für welche Werthe von y und z wird x; für welche Werthe von x und z wird y, und für welche Werthe von x und y wird z ein Eminentes, wofern x, $-y$, $-z$ die drei Wurzeln der Gleichung: $x^3 - Px - Q$ vorstellen, so ergibt sich Folgendes.

Es ist: $zy - xy - zx = -P$ oder $(y - x)z - xy = -P$ und $z = x - y$, also:

$$(y - x)(x - y) - xy = xy - x^2 - y^2 = -P.$$

Wir bezeichnen: $xy - x^2 - y^2$ mit k, dann wird, um die erste Frage zu erledigen:

$\left(\frac{dk}{dy}\right) = x - 2y$; $\left(\frac{dk}{dx}\right) = y - 2x$; $\frac{dx}{dy} = -\left(\frac{x - 2y}{y - 2x}\right) = 0$, somit: $x = 2y$;

$\frac{x^2}{2} - x^2 - \frac{x^2}{4} = -P$; $\frac{3x^2}{4} = P$; $x = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ und es kommt dazu:

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{-(y - 2x)\left(\frac{dx}{dy} - 2\right)}{(y - 2x)^2} = \frac{-\left(\frac{dx}{dy} - 2\right)}{y - 2x} = \frac{-4}{3x} = \frac{-2}{\sqrt{3P}}.$$

Es bietet somit: $x = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ ein Maximum, so lange man $\sqrt{3P}$ positiv annimmt, somit $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ die obere Grenze der positiven Wurzel.

Aus: $y - 2x = 0$ oder $x = \frac{y}{2}$ ergibt sich weiter: $P = 3x^2$; $x = \sqrt{\frac{P}{3}}$.

Für das letzte Ergebniss bietet aber: $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{+2}{y-2x}$ kein Criterium, ob wir ein Maximum oder Minimum fanden. Dagegen folgt aus: $x^2 - xy + y^2 = P$, $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3y^2}{4}}$. Bedeutet h eine der Null sehr nahe Grösse und man substituirt $y + h = 2\sqrt{\frac{P}{3}} + h$ in den eben gewonnenen Werth für x, so erscheint: $x = \sqrt{\frac{P}{3}} + \frac{h}{3} \pm \sqrt{-3h\sqrt{\frac{P}{3}}}$, wenn man h^2 nicht beachtet, also Unmögliches; wogegen der Einsatz: $y - h = 2\sqrt{\frac{P}{3}} - h$ auf $x = \sqrt{\frac{P}{3}} - \frac{h}{3} \pm \sqrt{3h\sqrt{\frac{P}{3}}}$, also auf Mögliches leitet; ein Zeichen, dass: $x = \sqrt{\frac{P}{3}}$ ein einseitiges Minimum, die untere Grenze der positiven Wurzel sein muss. Dasselbe Ergebniss erscheint, sobald man von: $x^2 - xy + y^2 - P = 0$ die geometrische Bedeutung aufsucht. Wir haben es dann mit einer Ellipse zu thun, deren Mittelpunktscoordinaten: $x = 0$ und $y = 0$ sind, deren grosse und kleine Axe mit der Abscissenaxe Winkel bilden, die durch $tang.\beta^2 - \frac{3}{4} tang.\beta = 1$, durch: $tang.\beta = \frac{3 \pm 5}{4} = 2$ oder $= -\frac{1}{2}$, also durch $\beta = 63^0\,27'$ und $\beta = 26^0\,33'$ bestimmt werden. Hier stellt dann $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3y^2}{4}}$, für $y = 2\sqrt{\frac{P}{3}}$, die Ordinate des einen, etwa des rechts liegenden Scheitels unserer Curve vor und es fallen alle Ordinaten des oberen Bogens grösser als $x = \sqrt{\frac{P}{3}}$ und alle Ordinaten für $y < 2\sqrt{\frac{P}{3}}$ imaginär aus. Für den unteren Curvenbogen dagegen ist x kleiner, als die zugehörige Scheitelordinate $< \sqrt{\frac{P}{2}}$. Dass aber hier bloss der obere Bogen in Betracht kommt, dafür spricht eben das stetige Grösserwerden des Ordinatenwerthes: $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{P - \frac{3y^2}{4}}$, bis zu einer gewissen Grenze hin, so bald man y allmälig kleiner als $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ nimmt. Dazu bringt $y = 0$; $x = \sqrt{P} > \sqrt{\frac{P}{3}}$. Also sind Grenzen der positiven Wurzel hiernach: $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ und $\sqrt{\frac{P}{3}}$, jenes nach oben, dieses nach unten hin. Dieselben Grenzen finden sich durch eine ganz ähnliche Deduction für die zwei negativen Wurzeln, wenn man diese Wurzeln nur ihren absoluten Werthen nach betrachtet.

Es ist demnach die positive Wurzel der Gleichung $x^3 - Px - Q = 0$ zwischen dem grössten Werth: $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ und den kleinsten Werthen: $\sqrt[3]{4Q}$ oder: $\sqrt{\frac{P}{3}}$ eingegrenzt. Der negativen Wurzeln Grenzen sind: $-\sqrt[3]{\frac{Q}{3}}$, $-2\sqrt{\frac{P}{3}}$, $-\sqrt{\frac{P}{3}}$ und zwar ist, wie bei den positiven Wurzeln: $2\sqrt{\frac{P}{3}}$ obere Grenze der, absolut genommenen, negativen grösseren Wurzel, für dieselben Wurzeln $\sqrt[3]{4Q}$ untere Grenze. Daneben stehen als Grenzen der kleineren negativen Wurzel die Ausdrücke: $\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$ und $\sqrt[2]{\frac{P}{3}}$. Diese Grenzen und Satz γ) unter Abtheilung II., wonach m ein Faktor von $4Q$ sein muss, erleichtern das Aufsuchen dieses ersten Theiles der Cubikwurzel ausserordentlich, so dass die Operation nicht mehr Schwierigkeiten bietet, als ein gewöhnlicher Quadratwurzelauszug.

Beispiel I.

$x^3 - 13x - 12 = 0$. Nach Cardanus kommt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{12 + \sqrt{-4900 : 27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{12 - \sqrt{-4900 : 27}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{48 + 4.70\sqrt{-\frac{1}{3} : 3}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{48 - 4.70\sqrt{-\frac{1}{3} : 3}}{8}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{48 + 280\sqrt{-\frac{1}{3} : 3}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{48 - 280\sqrt{-\frac{1}{3} : 3}}{8}}.$$

Obere Grenze der positiven und der grösseren, absolut genommenen, negativen Wurzel: $\sqrt[2]{\frac{4P}{3}} = \sqrt[2]{\frac{4.13}{3}} = \sqrt[2]{\frac{156}{9}} = 4{,}163\ldots$. Untere Grenze: $\sqrt[3]{4Q} = \sqrt[3]{48} = 3{,}634\ldots$ Andere obere Grenze: $\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{4P}{3}} = 2{,}081\ldots$

Es sei $m = 4$ so folgt:

$\frac{4Q - m^3}{m} = \frac{48 - 64}{4} = -4 = -y^2$; $y = \pm 2$. Es sei ferner $m = -3$, dann wird:

$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{48 + 27}{3} = 25 = y^2$; $y = \pm 5$. Für $m = -1$ endlich wird:

$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{48 + 1}{1} = 49 = y^2$; $y = \pm 7$. Darum:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2};\ x' = \frac{-3 \pm 5\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2};\ x'' = \frac{-1 \pm 7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2},$$

wenn wir wieder mit einem Ausdruck die beiden Theile der Cardanischen Formel bezeichnen; also sind die Wurzeln der Gleichung:

$$x = +4;\ x' = -3;\ x' = -1.$$

Beispiel II.

$x^3 - 9x - 10 = 0$. Nach Cardanus wird:

$$x = \sqrt[3]{5 \pm \sqrt{25 - \frac{9^3}{27}}} = \sqrt[3]{5 \pm \sqrt{-2}} = \sqrt[3]{5 \pm \sqrt{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{40 \pm 8\sqrt{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{8}}.$$

Grenzen: $\sqrt[3]{\frac{4P}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{12.9} = 3{,}464....$

$\sqrt[3]{4Q} = \sqrt[3]{40} = 3{,}419....$

$\sqrt[3]{\frac{P}{3}} = 1{,}732....$

Die positive, sowie die (grössere) negative Wurzel ist nach diesen Grenzmethoden irrational, oder ein ächter Bruch, die kleinere negative Wurzel muss rational sein. Es werde: -2, als Faktor von 40 für m genommen, dann folgt:

$$\frac{4Q + m^3}{m} = \frac{40 + 8}{2} = 24 = y^2;\ y = \pm 2\sqrt{6},$$ demnach wäre:

$$\left(\frac{m \pm y\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-2 \pm 2\sqrt{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3$$

$$= \left(-8 \pm 3\,(-2)^2 2\sqrt{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}} + 2.4.6 \mp 8.6\sqrt{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right) : 8$$

$$= \left(\frac{40 \pm 8\sqrt{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{8}\right)$$ daher:

$$x'' = 1 - \sqrt{6};\ x' = -2;\ x = 1 + \sqrt{6};$$

denn durch Umwandlung der cubischen Gleichung in eine unreine quadratische Gleichung, indem man mit der Wurzelgleichung der rationalen eben gefundenen Wurzel -2 dividirt, lassen sich die anderen beiden irrationalen Wurzeln leicht ausfindig machen.

Beispiel III.

Newton gibt in seiner *Arith. univ.* als Beispiel zu seiner Annäherungsmethode für irrationale Wurzeln: $x^3 - 7x - 7 = 0$; wofür die Grenzen der positiven Wurzeln: $\frac{1}{3}\sqrt[3]{12P} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{84} = 3{,}05505..$ und $\sqrt[3]{4Q} = \sqrt[3]{28}$ $3{,}036588...$ sind. Cardanus gibt dazu: $x = \sqrt[3]{(28 \pm 56\sqrt{-\frac{1}{3}}) : 8}$. Wir wählen: $m = 3{,}045...$, dann erscheint: $\frac{28 - (3{,}045...)^3}{-3{,}045...} = -0{,}0112.. = -y^2$,

also: $y = 0{,}33...$ und:

$$x = \frac{3{,}045...}{2} + \frac{0{,}33..}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{3}} + \frac{3{,}045..}{1} - \frac{0{,}33..}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{3}} = 3{,}045....$$

Das m ist durch die oben unter II. ausgesprochenen Gesetze γ) und δ) und dadurch, dass für die positive Wurzel, dessen Cubus grösser, für die negative Wurzel derselbe kleiner als $4Q$ ausfallen, dass ferner m immer Faktor von $4Q \mp m^3$ sein soll, genau genug bestimmt, um auch bei grossen Zahlen nicht fehl zu greifen; sonst gelten für dieses m alle Bestimmungen, welche von dem x der Gleichung selbst feststehen. Wir wählen hierfür noch als

Beispiel IV.

$x^3 - 1351x - 666 = 0$. Cardanus gibt:

$x = \sqrt[3]{\frac{666}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{666}{2}\right) - \frac{1351}{27}}}$ und dieser Werth für unsere Rechnung umgestaltet, wird:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2664}{8} \pm \frac{8}{8}\sqrt{\frac{2462852548.}{9}}\sqrt{-\frac{1}{3}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(2664 \pm \sqrt{\frac{+\,64.2462852548.}{9}}\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) : 8}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(2664 \pm \sqrt{157622563072.}\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) : 8.}$$

Der positiven Wurzel obere Grenze ist hier: $\sqrt[3]{\frac{4.1351}{3}} = 42{,}43..$, deren untere Grenze: $\sqrt[3]{2664} = 13{,}86....$ Die Wahl für m wird unter den 29 Zahlen dadurch sogleich sehr erleichtert, dass $666 = 2.3.3.37.$ und m als Faktor von Q, darum nur 37 sein kann. Da aus:
$\frac{4Q - m^3}{-m} = \frac{2664 - 50653}{-37} = \frac{47989}{37} = \frac{27.1297}{37}$ sich ergibt, so folgt:

$$1297 = y^2;\ y = \pm\sqrt{1297};\ \text{darum;}$$

$$+x = \frac{37}{2} + \sqrt{\frac{1297}{2}}\sqrt{-\frac{1}{3}} + \frac{37}{2} - \sqrt{\frac{1297}{2}}\sqrt{-\frac{1}{3}} = 37.$$

Von der Richtigkeit unserer Wahl überzeugt die Ausführung der Formel:

$$\left(\frac{37 + \sqrt{1297}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3$$

$$= \left(37^3 + 3.37^2\sqrt{1297}\sqrt{-\tfrac{1}{3}} - 37.1297 - \frac{1297}{3}\sqrt{1297}\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right) : 8$$

$$= \left(37\,(37^2 - 1297) + (3^2.37^2 - 1297)\sqrt{1297}\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right) : 8$$

$$= \left(37\,(1369 - 1297) + (12321 - 1297)\sqrt{1297}.\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right) : 8$$

$$= \left(2664 + \sqrt{\frac{157622563072}{9}}\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right) : 8.$$

Die anderen Wurzeln haben die allgemeine Form:

$$x' = \frac{-37+\sqrt{1297}}{4} + \left(37\,\frac{-37-\sqrt{1297}}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} : 2$$

$$\frac{-37+\sqrt{1297}}{4} - \left(37\,\frac{-37-\sqrt{1297}}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} : 2$$

$$x'' = \frac{-37-\sqrt{1297}}{4} + \left(37\,\frac{-37+\sqrt{1297}}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} : 2$$

$$\frac{-37-\sqrt{1297}}{4} - \left(37\,\frac{-37+\sqrt{1297}}{2}\right)\sqrt{-\frac{1}{3}} : 2.$$

Hier häufen sich fast alle Schwierigkeiten, die überhaupt unserer Vereinfachung der Cardanischen Formel sich entgegen stellen, deren sind aber genug, um selbst einen Euler, unvertraut mit den oben gegebenen Abhaltepunkten, von der weiteren Verfolgung solcher Probleme abzuhalten.

Mit unserer Auflösung erledigt sich zugleich die Aufgabe, die dritte Wurzel aus einem Binomium von der Form $A \pm \sqrt{B}$ auszuziehen, wenn A und B Zahlen sind. Einige Beispiele werden genügen, um hier klar zu werden und es sei verlangt: $\sqrt[3]{-\frac{9}{2} \pm \sqrt{-\frac{175}{4}}}$. Um die diesem Fall entsprechende Gleichung dritten Grades zu bestimmen, wissen wir, dass: $\frac{Q}{2} = -\frac{9}{2}$; $\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27} = -\frac{175}{4}$; $\frac{P^3}{27} = \frac{81}{4} + \frac{175}{4} = \frac{256}{4} = 64$, $P = 12$ für die Zeichen der Cardanischen Formel sein muss, woraus die gesuchte Gleichung: $x^3 - 12x + 9 = 0$ hervorgeht. Die Grenze der positiven Wurzel ist: $\sqrt{\frac{4.P}{3}} = \sqrt[2]{16} = 4$, die untere Grenze derselben: $\sqrt[2]{36} = 3{,}3\ldots$ Die Formel: $\sqrt[3]{-\frac{9}{2} \pm \sqrt{-\frac{175}{4}}}$, für unsere Zwecke umgeändert, bringt: $\sqrt[3]{\frac{-36 \pm 3.4\sqrt{+175}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{8}}$. Es gibt für $m = 3$ ferner: $\frac{4Q - m^3}{-m} = \frac{-36-27}{-3} = 21 = y^2$; $y = \pm\sqrt{3.7.}$, darum ist der gewünschte Wurzelauszug: $\frac{3+\sqrt{3.7.}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3+\sqrt{-7}}{2}$.

Als Beweis für die Richtigkeit der Lösung aber hierzu bringt:

$$\left(\frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right)^3 = (27 + 3.3^2\sqrt{-7} - 3.3.7 - 7.\sqrt{-7}) : 8$$

$$= (-36 + 20\sqrt{-7}) : 8 = (-36 + 4.\sqrt{-175}) : 8.$$

Lacroix in d. *Complément des élémens d'Algébre* kann nur durch ein zufälliges Rathen die dritte Wurzel von: $2 + 11\sqrt{-1}$ finden. Wir bringen Bestimmteres an die Stelle des regellosen Versuches. Es ist: $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[3]{16+88\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}}{8}$. Ohne weiter uns mit dem Aufsuchen einer diesem Ausdruck entsprechenden Gleichung abzugeben, lässt sich doch durch die eben gegebenen Grenzmethoden durch: $\sqrt[3]{4Q} = \sqrt[3]{16} = 2{,}59..$ und $\sqrt[2]{\frac{4.P}{3}} = \sqrt[2]{20} = 4{,}472..$ voraussehen, dass das $m = 4$ sein muss, da $Q = 4$, und $m = 4$ ein Faktor hiervon ist. Es gibt aber: $\frac{4Q - m^3}{-m} = \frac{16 - 64}{-4} = 12$, wofern wir $m = 4$ wählen, daher wird: $y = \pm 2\sqrt{3}$; und in der That bringt: $\left(\frac{4 + 2\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.

Sonst entspricht ganz allgemein der Formel: $\sqrt[3]{(M + \sqrt{N})}$ eine cubische Gleichung von der Gestalt: $x^3 - 3\sqrt[2]{(M^2 - N)}\, x - 2M = 0$.

Schlussbemerkung.

Betrachtet man eine Gleichung als Function der inliegenden Unbekannten, letztere als Variabele, wie es bei den vorigen Grenzbestimmungen bereits geschah, so wird jede derselben durch Einführung ihrer Wurzelwerthe auf ein Kleinstes auf Null reducirt. Es muss sich somit wohl die Lösung aller Gleichungen an die Theorie der eminenten Werthe anschliessen lassen. Um dieses an zwei Beispielen zu zeigen, diene Folgendes: Fragt man, wie's oben für die cubischen Gleichungen geschah, nach den eminenten Werthen des u in der quadratischen Gleichung: $u^2 - xu + Q = 0$, indem man x als Urvariabele, u als die davon abhängige Variabele, Q als beliebige Constante betrachtet, so folgt aus: $u^2 - xu + Q = k$; $\left(\frac{dk}{dx}\right) = -u$; $\left(\frac{dk}{du}\right) = 2u - x$; $\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{u}{x - 2u}$, woraus $u = 0$ oder $x = 2u$ sich ergibt. Die letzte Bedingung in die quadratische Gleichung wieder eingesetzt, bringt: $u^2 = Q^2$; $u = \pm\sqrt{Q}$; $x = \pm 2\sqrt{Q}$. Was mag $u = +\sqrt{Q}$ für ein eminenter Werth sein?

Setzt man einmal: $2\sqrt{Q}+h$, dann $2\sqrt{Q}-h$ für x in $\left(\frac{du}{dx}\right)$, betrachtet h als eine der Null sehr nahe liegende Grösse, deren zweite Potenz verschwindend klein wird, so erscheint im ersten Fall: $\frac{+\sqrt{Q}}{h}$, im zweiten: $\frac{-\sqrt{Q}}{h}$, als Kriterium, dass: $u=+\sqrt{Q}$ ein Minimum vorstellt.

Die Lösung: $u=\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-Q}$ bringt für $Q=0$, dann $u=x$ ein Grösstes. Dieses auf die Gleichung $u^2-Pu+Q=0$ und deren Lösung angewendet, zeigt, dass: $u=\frac{P}{2}\pm\sqrt{\frac{P^2}{4}-Q}$, wenn wir $\sqrt{Q}$ mit *Min.*, P mit *Max.* bezeichnen, sich durch folgenden Ausdruck:

$$u=\frac{Max.}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{Max.}{2}\right)^2-(Min.)^2}$$

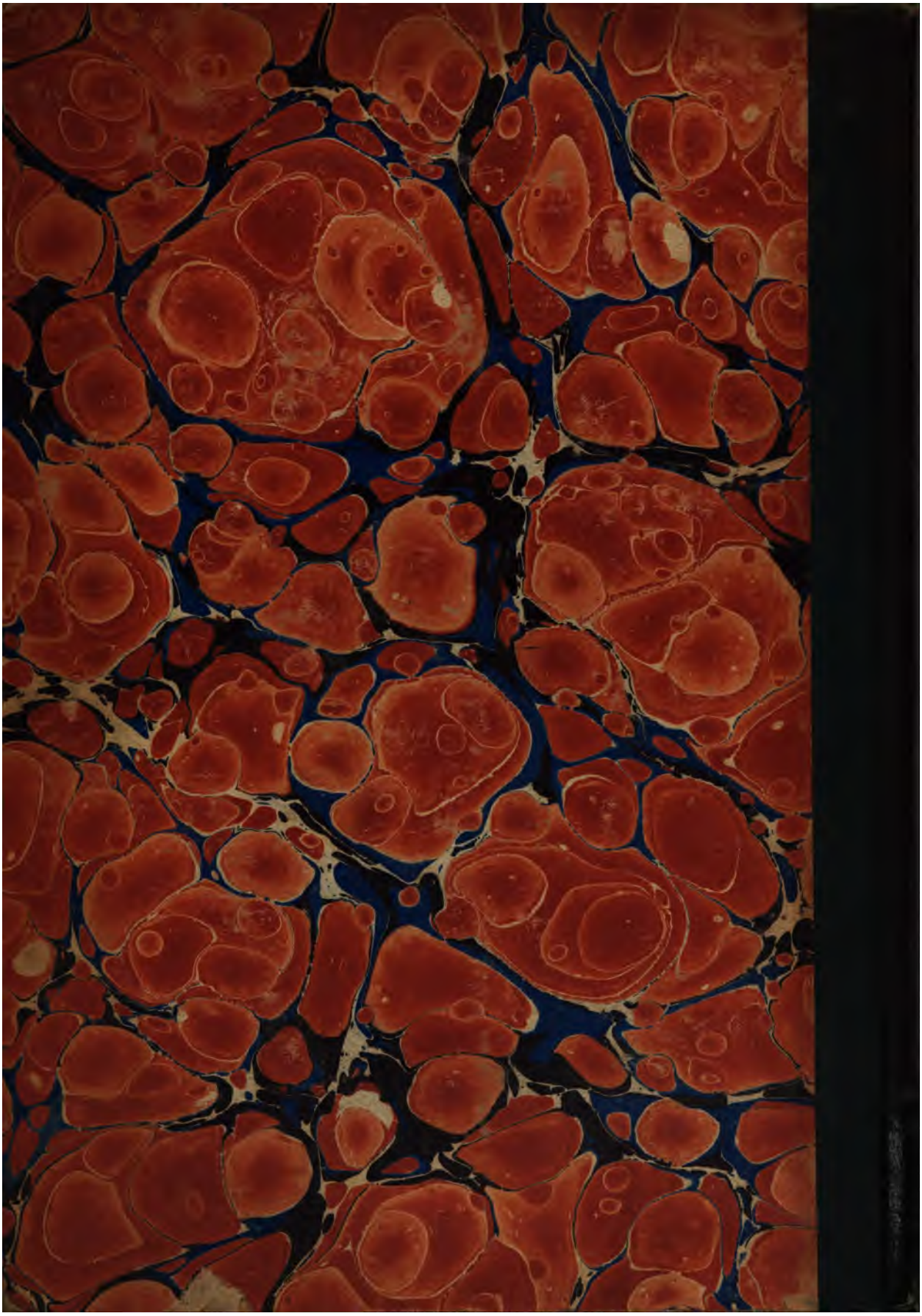
$$=\frac{1}{2}\left[Max.\pm\sqrt{(Max.)^2-(2\,Min.)^2}\right]$$

darstellen lässt.

Für die cubische Gleichung: $x^3-Px-Q=0$, war $\sqrt[3]{4Q}=Min.$, also $4Q=(Min.)^3$; $16Q^2=(Min.)^6$; $\frac{Q^2}{4}=\left(\frac{Min.}{2}\right)^6$ und: $2\sqrt[2]{\frac{P}{3}}=Max.$; also $\frac{P}{3}=\left(\frac{Max.}{2}\right)^2$; $\frac{P^3}{27}=\left(\frac{Max.}{2}\right)^6$, demnach, wofern wir diese Bezeichnung in Cardan's Formel einführen, wird:

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{Min.}{2}\right)^3+\sqrt{\left(\frac{Min.}{2}\right)^6-\left(\frac{Max.}{2}\right)^6}}+\sqrt[3]{\left(\frac{Min.}{2}\right)^3-\sqrt{\left(\frac{Min.}{2}\right)^6-\left(\frac{Max.}{2}\right)^6}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{(Min.)^3+\sqrt{(Min.)^6-(Max.)^6}}+\sqrt[3]{(Min.)^3-\sqrt{(Min.)^6-(Max.)^6}}\right\}$$

und wir sehen die eine Wurzel der cubischen Gleichung zwischen ihre eminenten Werthe eingegrenzt; ebenso die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung. Eine Erweiterung dieser Bezeichnung für die Gleichung vierten Grades würde nicht schwierig sein.

Schnellpressendruck von F. W. Gadow & Sohn in Hildburghausen.